$\mathbb{EXERCISE}$ ONE

*10/31*或 *11/7* 课堂交。	注(***)部分是选做.

1. 给n维向量空间一个微分结构，说明其是一个光滑流形。特别任一个$n\times m$维的矩阵群是一个nm维流形。

2. 给定$\mathbb{S}^n$是单位n维球,$N=(0,0,\ldots,1)$是北极.定义球极投影$\sigma:\mathbb{S}^n-N\to\mathbb{R}^n$, 其中 $\sigma(x^1,x^2,\ldots,x^{n+1})=\frac{(x^1,x^2,\ldots,x^n)}{1-x^{n+1}}$

   记$S=-N$为南极，定义$\sigma_t=-\sigma(-x),x\in\mathbb{S}^n-S$.

   以下证明可以仅仅考虑$n=2$情形。

   (a) 证明: σ 是双射。求出逆映射。
   (b) 证明: σ, σ_t 给出了一个微分结构。
   (c) 证明：以上给出的微分结构与投射到平面(六个图坐标卡)得到的微分结构是相容的。

3. 构造单位开圆盘$|X|<1$到R^2的微分同胚。***特别说明开正方形(不含边界)是否与单位开圆盘微分同胚? 注：他们是拓扑同胚。

4. (切向量与切映射)（教材P8，注5.）

   (a) 任意$p\in R^2$,给出其切空间TR^2_p的基，对于每个基给出以其为切向量的一条曲线。
   (b) 设$X:U\to M$是一个参数化，给出$TM_{X(p)}$的基.
   (c) X也可看成U到M的光滑映射。 取$e_1=(1,0),e_2=(0,1)$为TR^2_p的切向量,利用曲线的复合， 证明：$dX_p(e_i)=\frac{\partial}{\partial x_i},i=1,2.$
   (d) 任意恒同映射$F:M\to M,F(p)=p$，计算其切映射有$d(Id)_p=Id$,后面Id是单位矩阵。

5. 给定光滑映射$\phi:M\to N$，其一点切映射$d\phi_p$是单的当且仅当$rank(d\phi)=dim(M)$. $d\phi_p$是满的当且仅当$rank(d\phi)=dim(N)$.

6. 证明以下流形是单一浸入子流形(并说明其不是嵌入子流形)。
   (a) (八字形)$\gamma : (-\pi/2, 3\pi/2) \to R^2, r(t) = (\sin 2t, \cos t)$
   (b) （环面上的曲线) $\gamma : \mathbb{R} \to T^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C}^2, r(t) = (e^{2\pi it}, e^{2\pi ict})$,其中$c$为无理数。
   ***说明当c为整数和有理数时，曲线的形状。
7. 定义函数$f : R^2 \to R$,水平集是$f(x,y) = c$的原像。
   (a) $f(x,y) = x^3 + xy + y^3$, 说明c取哪些值时，水平集是嵌入子流形。
   (b) $f(x,y) = x^3 - y^2$,说明$f(x,y) = 0$不是嵌入子流形。可否是浸入子流形呢?
8. 给定$\mathbb{S}^n$是单位n维球,定义对径映射$\alpha(x) = -x$.
   以下证明可以仅仅考虑$n = 2$情形。
   (a) 写出α在球极投影坐标卡下表示，证明α是一个光滑同胚。
   (b) 选取一个定向坐标卡，说明当n为奇数时，α是一个保定向的微分同胚， 当n为偶数时，α是一个反定向的微分同胚。
   (c) 利用覆盖映射$\pi : S^2 \to RP^2$和S^2的投射坐标卡(6个),给出RP^2的一个微分结构(3个坐标卡)。
   (d) 说明RP^2是不可定向的。
9. (Lie Bracket)
   (a) 证明：Jacobi恒等式。
   (b) 给定$\mathbb{R}^3$上的向量场$V = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, W = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, U = x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}$，计算$[V,W], [W,U], [U,V]$,并验证Jacobi恒等式。
10. (***选做思考:建议了解.)
    (a) ***证明：光滑流形的开子集是光滑流形，光滑流形的乘积还是光滑流形。
    (b) ***说明单位开圆盘上有无穷多个微分结构。
    (c) *** 说明 切丛 TR^n微分同胚与R^{2n}.
    (d) *** 说明Mobius 带是不可定向的。
    (e) ***构造S^{2n-1}上的一个处处不为零的光滑向量场。